268. 重心ト對稱空間ノ構造トノ關係ニ就テ

南雲道夫（阪大）

對稱ナ距離空間（定義ハ後ニアリ）ニ於テ重心（有限個ノ点ノ）ヲバ二ツノ見地カラ考察スル。一ツハ結合ノ法則カラ，モ一ツハ最大確率ノ点トシテ見ル。前者ノ見地ニヨリ，空間ハ線狀空間（Banach ノ空間）トナル。之レニ後者ノ見地ヲ附ケ足セバ，空間ハ廣義ノ Euclid 空間（Hilbert 空間モ含マレル）トナル。以上ガ本論ノ要点デアル。証明ハスデミチニ止メテ置ク。

§ 結合ノ法則ノ見地ヨリ

$\boxed{\text{對稱ナ距離空間}}$ $\mathfrak{R}$ トハ，平タク言ヘバ空間ノ各点ヲ中心トシテ空間ガ對稱ナルモノヲ言フ。即チ

$$\overline{AC}=\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB} \qquad [\overline{AB}\text{ ハ }A,B\text{ 間ノ距離}]$$

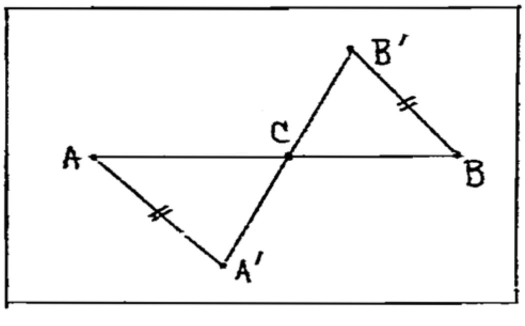
ナル時 C ヲ A, B ノ<u>中点</u>ト名付ケレバ

(i) 二点ハ常ニ只一ツノ中心ヲ有ス。

(ii) A, B ヲ任意ノ二点トスルトキ，B ガ AC ノ中点ニナル様ナ点 C ガ常ニ只一ツ存在スル。

(iii) C ガ A, B ノ中点デアルト同時ニ，A′, B′ ノ中点ナラバ

$$\overline{AA'}=\overline{BB'}$$



(iv) $\mathfrak{R}$ ハ完全ナ距離空間デアル。（Cauchy ノ收斂條件ノ成立スル空間）

以上ノ四ツノ條件ガ成立スル空間ヲ對稱デアルト名付ケル。

$\boxed{\text{重心ニ關スル結合ノ法則}}$

(i)　CガA, Bノ中点ナラバ；A, Bノ重心ハCデアル。

(ii)　n個ノ点ノ重心ハ，ソノ内ノm個ノ点（$m<n$）ヲバ其ノm個ノ点ノ重心（m個ガ重複シタモノ）デ置キカヘテモ變ラナイ。〔之レヲ重心ニ關スル結合ノ法則ト名付ケル〕

(ii)カラ特ニ（A, B）ヲ以テA, B二点ノ重心（中点ト一致ス）ヲ表ハセバ，四点A, B, A′, B′ニツイテ

(iii)　$\big((A,B),(A',B')\big)=\big((A,A'),(B,B')\big)$

ガ成立スル。之ヲ弱イ結合ノ法則ト名付ケヨウ。

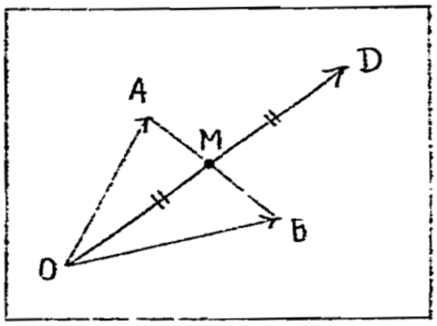
$\boxed{\text{定理}}$　弱イ結合ノ法則ノ成立スルトキ；0ヲ$\mathcal{R}$ノ任意ノ点トシ

$$(0,D)=(A,B)$$

ナル関係ガ成立スレバ，之ヲ

$$\overrightarrow{0D}=\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{0B}$$

デ表ハスモノト定メレバ，



(1)　$\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{0B}=\overrightarrow{0B}+\overrightarrow{0A}$

(2)　$(\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{0B})+\overrightarrow{0C}=\overrightarrow{0A}+(\overrightarrow{0B}+\overrightarrow{0C})$

(3)　$\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{0X}=\overrightarrow{0B}$

ナル点Xガ一義的ニ定マル。（Vektorガ定義サレタ!）

上ノ定理及ビ（A, A）＝Aニヨリ，結局

$$(A,B)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{0B})$$

が証明サレル。

尚 $\mathfrak{R}$ が對稱ナ空間ナルコトニヨリ結局 $\mathfrak{R}$ ハ線狀空間 (Banach Space) ナルコトが證明サレル。

又結合ノ法則 (ii) が成立スル場合ニハ,

$$A_1, A_2, \cdots\cdots\cdots, A_n$$

ノ重心 G ハ

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\overrightarrow{OA_\nu}$$

ニヨツテ與ヘラレルコトが證明サレル。(拙著論文 Gött. Nachr. 1932, 56 頁參照)

§ 確率函數ノ決定ト $\mathfrak{R}$ ノ構造

次ニ又一般ノ對稱ナ空間ニモドリ, 今度ハ n 個ノ点 $A_1, A_2, \cdots\cdots\cdots, A_n$ ノ重心 G ヲバ

$$\varphi(\overline{A_1G})\cdot\varphi(\overline{A_2G})\cdots\cdots\varphi(\overline{A_nG}) = \underline{極大}!$$

ニヨツテ定義スル。$\varphi(r)$ $(r \geqq 0)$ ハ確率函数デ $\varphi(0)=1$, $0 < \varphi(r) < 1$ $(r>0)$, デ r ニ對シテ連續純減小函数デアル。

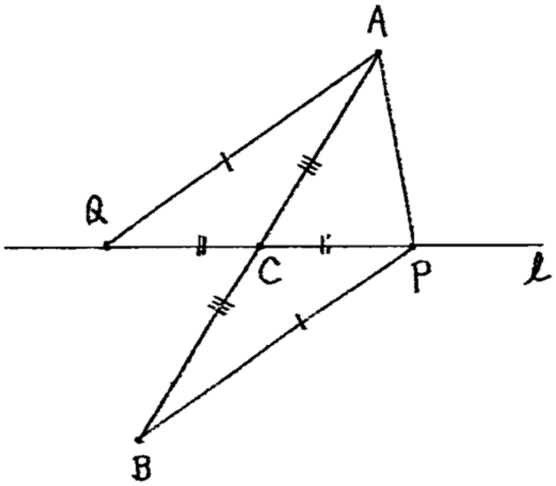
$$\varphi(r) = e^{-f(r)}$$

トスレバ $f(0)=0$, $f(r)>0$ $(r>0)$ デ r ニツキ連續純増加函数トナル。シカシテ G ハ

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\overline{A_\nu G}) = \underline{極小}!$$

ニヨツテ定義サレル。

先ヅ重心ガ一義的ニ決定スルタメニハ $f(\overline{AX})$ ハ X ノ函数トシテ *konvex* デナケレバナラナイ。(Aハ任意)

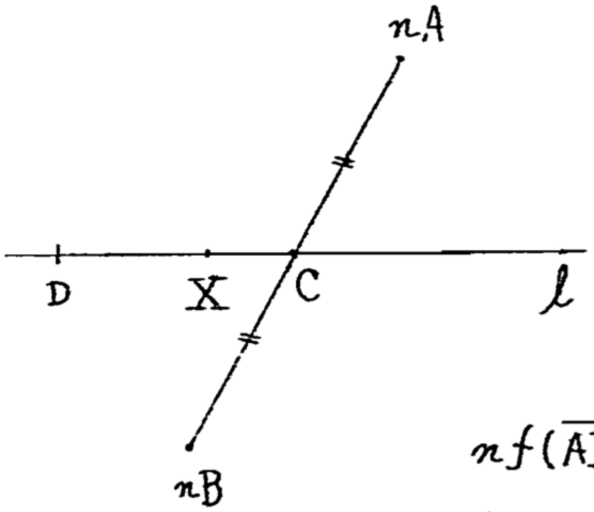


(($\mathfrak{R}$デハ中点ノ性質ニヨリ直線ガ定義出来ル。$\mathfrak{R}$ニ於ケル連続函数〔実数値ヲ取ル函数〕ガ$\mathfrak{R}$内ノ任意ノ直線 l 上ニ於テ *konvex* ナラバ, 之レヲ *konvex* デアルト云フ。))

証明ハ A,B ノ重心ヲ C トシテ圖ニヨリ工夫サレタシ。

次ニ重心ハ更ニ結合ノ法則 (ii) ヲ満足スルモノト假定スル。シカラバ$\mathfrak{R}$ハ線状空間トナリ、重心ハ普通ノ *Vektor* 空間ニ於ケル重心ト同ジモノトナル。

此ノ場合ニハ $f(\overline{AX})$ ハ *konvex* ナルノミナラズ微分可能(任意ノ直線上デ)トナル。((証明ニハ *konvex* ナルコトノ証明ト同様ナ考ヘ方ヲシテ, 若シモ C ノ両側ニ於ケル微係数ガ一致セヌ時ニハ, n ヲ充分大ナル自然数ニトレバ,



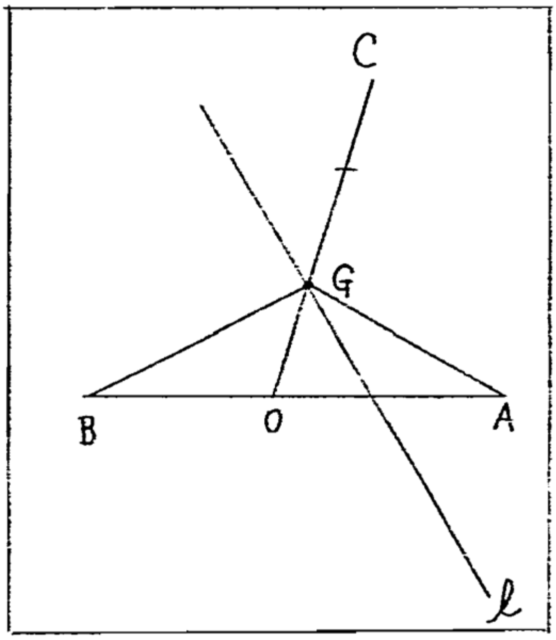
$$nf(\overline{AX})+nf(\overline{BX})+f(DX)$$

〔D ハ l 上ノ点〕ハ C ニ於テ最小トナリ, nA, nB, D ノ重心ガ C ニアルコトトナッテ不都合デ

アルコトヲ示セバヨイ))

$\boxed{f\text{ニ関スル函数方程式}}$　$\mathfrak{R}$ ハ線状空間デアルカラ点ハ Vektor（原点ヲ決定シテ）ニヨッテ表ハサレル。故ニ此処デハ点ノ代リニ Vektor 記号 $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ 等ヲ用ヒル。以上ノスベテノコトカラ $f(\mathfrak{x})$ ハ次ノ函数方程式ヲ満足セネバナラナイ。[$f(\mathfrak{x})$ ハ $f(\overline{OX})$ ヲ意味スル]

$$f(\mathfrak{x}+\mathfrak{y})+f(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})=2\{f(\mathfrak{x})+f(\mathfrak{y})\}$$



〔証明〕 $\mathfrak{x}=\overrightarrow{OA}$, $\mathfrak{y}=\overrightarrow{OG}$, $-\mathfrak{x}=\overrightarrow{OB}$, トスレバ

$$f(AG)+f(BG)$$
$$=2f(OG)+f(OA)+f(OB)$$

ナルコトヲ証明スレバヨイ。ソレニハ

$$f(AG)+f(BG)-2f(OG)$$

ハGが如何ニ動イテモ一定ナルコトヲ証明スレバヨイ。

今 $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ トスレバ, GハA, B, Cノ重心デアルト同時ニ 2·O 及ビ C ノ重心デアル。故ニ $f(AX)+f(BX)+f(CX)$ 及ビ $f(CX)+2f(OX)$ ハ〔同時ニ〕Gニ於ケル微係数（Gヲ通ル任意ノ直線 l ニ沿フテ）が零デアル。故ニソノ差 $f(AX)+f(BX)-2f(OX)$ ハGニ於イテ微係数が零トナル。所がGハ任意デアルカラ $f(AX)+f(BX)-2f(OX)$ ハ如何ナル直線上デモ常ニ微係数が零即チ常数デアル。

$\boxed{\mathfrak{R}\text{ノ構造}}$　次ニ $f(r)=ar^2$ ナルコトヲ証明スル。ソレニハ問題ヲ一直線上ニカギル。カクスレバ此ノ問題ハ〝實数ニツイテ算術平均ヲ與ヘルヤウナ確率函数ヲ求メヨ!〟トイフコトニナル。之レハ上ノ結果ヲ應用スレバ x, y ヲ実数トシテ函数方程式

$$f(x+y)+f(x-y)=2\{f(x)+f(y)\}$$

ヲ解ケトイフコトニナルカラ容易ニ $f(r)=ar^2$ ヲ得ル。所ガ r ハ空間 $\mathfrak{R}$ ノ距離デアルカラ，我々ハ $\mathfrak{R}$ ノ距離 $|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|$ ニツイテノ函数方程式

$$|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}|^2+|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2=2\left\{|\mathfrak{x}|^2+|\mathfrak{y}|^2\right\}$$

ヲ得ル。之レハ *J. v. Neumann* ガ *Hilbert* 空間ヲ特徴ヅケルタメノ距離ニ関スル條件デアル。上ノ式ニ於テ $\mathfrak{x}$ ノ代リニ $\mathfrak{x}+\mathfrak{x}'$, 及ビ $\mathfrak{x}-\mathfrak{x}'$ ヲ置イタモノヲ相減ジ，$|\mathfrak{x}+\mathfrak{x}'|^2-|\mathfrak{x}-\mathfrak{x}'|^2=4\varphi(\mathfrak{x},\mathfrak{x}')$ トオケバ，$\varphi(\mathfrak{x},\mathfrak{x}')$ ハ $\mathfrak{x}$ ニツイテモ $\mathfrak{x}'$ ニツイテモ *linear* デ $\mathfrak{x},\mathfrak{x}'$ ニツキ對稱［$\mathfrak{x},\mathfrak{x}'$ ノ *Skalares Produkt*］トナリ

$$\varphi(\mathfrak{x},\mathfrak{x})=|\mathfrak{x}|^2$$

ヲ得ル。カクテ $\mathfrak{R}$ ハ廣義ノ *Euclid* 空間ナルコトガ証明サレタ。